

第 2 章 连续时间信号的时域分析

本章讨论线性时不变系统的时域分析方法。时域分析方法不涉及任何变换，直接求解系统的微分方程，对于系统的分析与计算全部都在时域内进行。这种方法具有直观、物理概念清楚等优点，也是学习变换域分析法的基础。

在本章中，首先讨论微分方程的经典解法，在此基础上，引进系统的零输入响应与零状态响应这两个重要的基本概念，使线性系统分析方法在理论上更完善。在引入系统的冲激响应以后，将冲激响应与激励信号进行卷积积分，这样可以求得系统的零状态响应。卷积积分方法具有清楚的物理概念，并可借助计算机求解。在线性系统理论中，卷积积分占有十分重要的地位。

2.1 系统响应的经典求解

2.1.1 连续系统的数学模型

系统分析的过程一般可以分为三个阶段：首先，建立系统的数学模型，即写出联系系统输入和输出信号之间的数学表达式；其次，采用适当的数学方法分析模型，求出系统在给定激励下的输出响应的数学表示式；最后，再对所得到的数学解进行物理解释，深化系统对信号进行变换处理过程的理解。

由此可见，系统数学模型的建立是分析系统的前提，同时也是关键。对于连续时间系统，系统数学模型的时域表示有两种形式：输入-输出描述法和状态变量描述法。前者数学模型是一元 n 阶微分方程，而后者是 n 元一阶联立微分方程组。本章只研究输入-输出方程的分析与求解，第 8 章专门讨论状态变量分析。

对于电系统，构成微分方程的基本依据是电网络的两个约束特性：

(1) 元件特性约束：即表征元件特性的关系式，如电容、电感、电阻各自电压与电流的关系等；

(2) 网络拓扑约束：由网络结构决定的电压、电流约束关系，例如基尔霍夫电压定律(KVL)和基尔霍夫电流定律(KCL)等。

下面举例说明如何列写系统数学模型——微分方程。

例 2-1 图 2-1 所示电路， $x(t)$ 为电压源激励信号，试写出电流 $i_2(t)$ 为输出信号的微分方程。

解

列出两个网孔的回路方程式

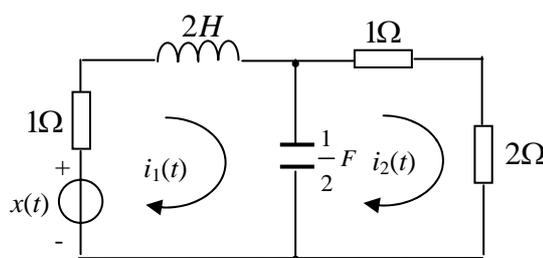


图 2-1 例 2-1 的电路

$$\begin{cases} 2 \frac{di_1}{dt} + i_1 + 2 \int (i_1 - i_2) dt = x(t) \\ 2 \int (i_2 - i_1) dt + 3i_2 = 0 \end{cases}$$

利用消元法来求解联立方程，可得到 $i_2(t)$ 的微分方程

$$6 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 7 \frac{di_2}{dt} + 8i_2 = 2x(t)$$

这是一个二阶常系数线性微分方程。

例 2-2 图 2-2 所示互感耦合电路， $x(t)$ 为电压源激励信号，试列写求电流 $i_2(t)$ 的微分方程式。

解 对于初、次级回路分别应用 KVL，可得到如下两个方程

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 - M \frac{di_2}{dt} = x(t) \\ L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 - M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

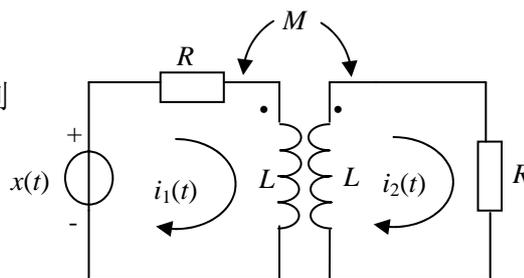


图 2-2 互感耦合电路

利用消元方法求解联立方程，可得到 i_2 的微分方程

$$(L^2 - M^2) \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2RL \frac{di_2}{dt} + R^2 i_2 = M \frac{dx}{dt}$$

这也是一个二阶常系数线性微分方程。

将以上二例推广到一般情况，对于一个恒定集中参数线性系统，其激励信号 $x(t)$ 与响应信号 $y(t)$ 之间的关系，可以用下列形式的微分方程式来描述

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (2-1)$$

式中系数 a_i, b_j 均为常数，式(2-1)就是一个常系数 n 阶线性常微分方程。

2.1.2 微分方程的求解

根据常系数线性微分方程的求解方法可以知道，式(2-1)的微分方程的解由齐次解 (homogeneous solution) $y_h(t)$ 和特解 (particular solution) $y_p(t)$ 两部分组成。即

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (2-2)$$

齐次解是当式(2-1)中的激励信号 $x(t)$ 及各阶导数都等于零时的解。齐次解应满足

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (2-3)$$

上式称为对应于式 (2-1) 的齐次微分方程。

齐次解以形式为 $Ae^{\alpha t}$ 的函数组合而成，令 $y(t) = Ae^{\alpha t}$ 代入式 (2-3)，我们得到

$$a_n A \alpha^n e^{\alpha t} + a_{n-1} A \alpha^{n-1} e^{\alpha t} + \dots + a_1 A \alpha e^{\alpha t} + a_0 A e^{\alpha t} = 0$$

由于 A 和 $e^{\alpha t}$ 均不为零，可简化为

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (2-4)$$

式(2-4)称为微分方程(2-3)的特征方程(characteristic equation),而特征方程的根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 称为微分方程的特征根(characteristic root)。

在特征根各不相同(无重根)的情况下,微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_n e^{\alpha_n t} \quad (2-5)$$

这里 A_1, A_2, \cdots, A_n 是由初始条件决定的系数。现举例说明求解齐次方程的过程。

例2-3 求微分方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

的齐次解。

解 特征方程为: $\alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0$

解得特征根为

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = -4$$

则所对应的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t}$$

上例是特征根为实数的情况,若特征根为单根且为共轭复数 $\alpha \pm j\beta$ 时,则所对应的齐次解为 $A_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + A_2 e^{(\alpha-j\beta)t}$,且可以化解为

$$e^{\alpha t} [A \cos \beta t + B \sin \beta t]$$

的形式。

当有重根的情况下,齐次解的形式将有所不同。假设 α_1 为特征方程的 k 重根,则 α_1 对应的齐次解有 k 项

$$A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 t e^{\alpha_1 t} + A_3 t^2 e^{\alpha_1 t} + \cdots + A_k t^{k-1} e^{\alpha_1 t} \quad (2-6)$$

例 2-4 求微分方程

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 7 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 16 \frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t)$$

的齐次解。

解 特征方程为

$$\alpha^3 + 7\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 0$$

可求得特征根为 $\alpha_1 = \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -3$,其中-2为二重根。

所以齐次方程的解为

$$y_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t} + A_3 e^{-3t}$$

由此可见,齐次解的形式仅取决于特征方程根的性质,而与激励信号无关,所以齐次解有时称为固有解(natural solution)(或称自由解)。当然齐次解的系数 A_1, A_2, \cdots, A_n 与激励信号无关。

微分方程的特解是由输入信号产生的,所以也叫作强迫解(forced solution)。特解的形式与激励信号的形式有关。将激励信号代入方程式(2-1)的右端,代入后右端的函数式称为“自由项”。通常,由观察自由项试选特解函数式,代入原方程后求得特解函数式中的待定系数,即可求出特解,下面举例说明特解的求解方法。

例 2-5 给定微分方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

若 1) $x(t) = t^2$, 2) $x(t) = e^{-2t}$, 分别求二种情况下方程的特解。

解 1) 将 $x(t) = t^2$ 代入方程的右端, 得到 $t^2 + 2t$, 为使等式两边平衡, 我们试选择特解函数式为:

$$y_p(t) = B_1 t^2 + B_2 t + B_3$$

其中, B_1, B_2, B_3 为待定系数。将 $y_p(t)$ 代入微分方程得到

$$3B_1 t^2 + (4B_1 + 3B_2)t + (2B_1 + 2B_2 + 3B_3) = t^2 + 2t$$

等式两端对应的同次幂项系数应相等, 即

$$\begin{cases} 3B_1 = 1 \\ 4B_1 + 3B_2 = 2 \\ 2B_1 + 2B_2 + 3B_3 = 0 \end{cases}$$

联解得到

$$B_1 = \frac{1}{3}, B_2 = \frac{2}{9}, B_3 = -\frac{10}{27}$$

所以特解为

$$y_p(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$$

2) 当 $x(t) = e^{-2t}$ 时, 右端为 $-2e^{-2t}$, 很明显, 可选择 $y_p(t) = Be^{-2t}$ 为特解, 这里 B 是待定系数。代入方程后有

$$3Be^{-2t} = -e^{-2t}$$

解得 $B = -\frac{1}{3}$

于是特解为 $y_p(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}$

用类似的方法, 可以求得其它几种典型激励信号对应的特解函数形式, 列于表 2-1, 供求解时选用。

表 2-1 与几种典型的自由项相应的特解

自由项	响应函数的特解 $y_p(t)$ 的形式
E (常数)	B
t^p	$B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \dots + B_1 t + B_0$
$e^{\alpha t}$	$Be^{\alpha t}$
$\cos \omega_0 t$	$B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t$
$\sin \omega_0 t$	
$t^p e^{\alpha t} \cos \omega_0 t$	$(B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \dots + B_1 t + B_0) e^{\alpha t} \cos \omega_0 t$
$t^p e^{\alpha t} \sin \omega_0 t$	$+(D_p t^p + D_{p-1} t^{p-1} + \dots + D_1 t + D_0) e^{\alpha t} \sin \omega_0 t$

注: (1) 表中 B, D 均为待定系数。

(2) 若自由项有几种激励函数组合, 则特解也为其相应的组合。

(3) 若表中所列特解与齐次解重复, 则应在特解中增加一项: t 倍乘表中特解。若这种重复形式有 k 次 (即特征根为 k 重根), 则依次增加倍乘 t, t^2, \dots, t^k 诸项。例如 $x(t) = e^{\alpha t}$, 而齐次解也是 $e^{\alpha t}$ (特征根 $\alpha = a$), 则特解为 $B_0 t e^{\alpha t} + B_1 e^{\alpha t}$ 。若 α 是 k 重根, 则特解为 $B_0 t^k e^{\alpha t} + B_1 t^{k-1} e^{\alpha t} + \dots + B_k e^{\alpha t}$

下面通过例子说明经典法求解的全部过程。

例 2-6 图 2-3 所示电路，已知激励信号 $x(t) = \cos 2tu(t)$ ，初始时刻电容两端电压均为零，求输出信号 $v_2(t)$ 的表达式。

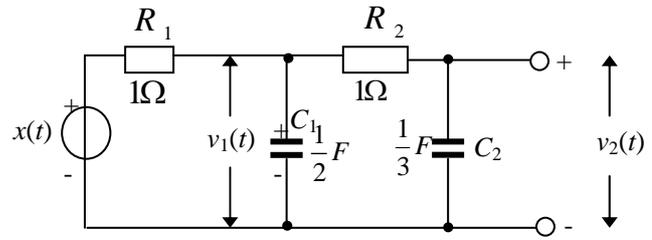


图 2-3 例 2-6 的电路

解 1) 列写微分方程

用节点电流方程可得

$$\begin{cases} \frac{x(t) - v_1(t)}{R_1} = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2} \\ \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2} = C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} \end{cases}$$

化简可得 $v_2(t)$ 的微分方程为

$$\frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + 7 \frac{dv_2(t)}{dt} + 6v_2(t) = 6 \cos 2tu(t)$$

2) 求齐次解，写出特征方程

$$\alpha^2 + 7\alpha + 6 = 0$$

特征根为

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -6$$

于是齐次解为

$$v_{2h}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$$

3) 求特解，根据表 2-1 可知 $y_p(t) = B_1 \sin 2t + B_2 \cos 2t$

将 $y_p(t)$ 代入微分方程求待定系数

$$-4B_1 \sin 2t - 4B_2 \cos 2t + 14B_1 \cos 2t - 14B_2 \sin 2t + 6B_1 \sin 2t + 6B_2 \cos 2t = 6 \cos 2t$$

$$\text{简化为} \quad (2B_1 - 14B_2) \sin 2t + (14B_1 + 2B_2 - 6) \cos 2t = 0$$

即

$$\begin{cases} 2B_1 - 14B_2 = 0 \\ 14B_1 + 2B_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

解得

$$B_1 = \frac{21}{50}, \quad B_2 = \frac{3}{50}$$

于是，特解为

$$y_p(t) = \frac{21}{50} \sin 2t + \frac{3}{50} \cos 2t$$

4) 系数 A_1, A_2 的确定

由于已知电容 C_2 上的初始电压为零，故有 $v_2(0^+) = 0$ ，又因为电容 C_1 上的初始电压也为零，

则流过 R_2 、 C_2 的电流也为零，即 $C_2 \frac{dv_2(0^+)}{dt} = 0$ ，也就是 $\frac{dv_2(0^+)}{dt} = 0$ 。借助这二个初始条件可

以得到

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \frac{3}{50} = 0 \\ -A_1 - 6A_2 + \frac{42}{50} = 0 \end{cases}$$

由此可解出

$$A_1 = -\frac{6}{25}, \quad A_2 = \frac{9}{50}$$

所以, 完全解为 $v_2(t) = \frac{9}{50}e^{-6t} - \frac{6}{25}e^{-t} + \frac{21}{50}\sin 2t + \frac{3}{50}\cos 2t \quad (t > 0)$

2.1.3 初始条件的确定

从以上分析可知, 为求系数 A , 我们利用了 n 个条件 $y(0^+), \frac{dy(0^+)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0^+)}{dt^{n-1}}$ 。实际上,

由于 $t=0$ 时刻加入了激励, 由于激励的作用, $y(t)$ 及各阶导数在 $t=0$ 时刻可能发生跳变而出现不连续。为区分跳变前后的数值, 我们以 0^- 表示激励接入前的瞬间, 而以 0^+ 表示激励接入后的瞬间。

将 $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$ 称为系统的起始条件 (original condition), 简称为 $\mathbf{y}^{(k)}(0^-)$,

它总结了为计算未来响应所需的过去全部“信息”, 而 $y(0^+), \frac{dy(0^+)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0^+)}{dt^{n-1}}$ 被称为系统的

初始条件 (initial condition), 简称为 $\mathbf{y}^{(k)}(0^+)$ 。若 $\mathbf{y}^{(k)}(0^+) \neq \mathbf{y}^{(k)}(0^-)$, 则表明起始点发生了跳变。

由于用经典法求解微分方程时, 是考虑了激励作用以后的解, 时间范围是 $0^+ \leq t < \infty$, 所以要利用 $\mathbf{y}^{(k)}(0^+)$ 来确定系数 A , 而不能利用 $\mathbf{y}^{(k)}(0^-)$ 。而通常给出的只是 $\mathbf{y}^{(k)}(0^-)$, 所以必须根据激励信号和微分方程确定 $\mathbf{y}^{(k)}(0^+)$ 。

下面我们研究如何从起始条件来确定初始条件。

在网络分析中, 可以利用系统内部储能连续性决定初始条件, 即: 没有受到冲激电流 (或阶跃电压) 作用, 电容两端的电压 $v_C(t)$ 不发生跳变; 当电感没有受到冲激电压 (或阶跃电流) 时, 流过电感的电流 $i_L(t)$ 不跳变, 即有

$$v_C(0^-) = v_C(0^+), \quad i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

但电容中流过的电流 $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ 和电感两端的电压 $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ 以及电阻上的电流及电压均可能发生跳变。

对于简单电路可以按照上述原则判断起始点是否发生跳变, 但对复杂电路或非电路系统, 跳变值往往不易获得, 这时可借助于微分方程两端奇异函数平衡的方法作出判断, 这种方法称为奇异函数平衡法。下面举例说明。

例 2-7 在图 2-2 所示电路中, 若激励为单位阶跃信号 $x(t) = u(t)$, 系统起始无储能, 试求 $i_2(t)$ 。

解 在例 2-2 中已给出电路的微分方程式, 将 $x(t) = u(t)$ 代入, 得

$$(L^2 - M^2) \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 2RL \frac{di_2(t)}{dt} + R^2 i_2(t) = M \frac{du(t)}{dt}$$

即
$$(L^2 - M^2) \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 2RL \frac{di_2(t)}{dt} + R^2 i_2(t) = M \delta(t)$$

1) 求齐次解, 特征方程为

$$(L^2 - M^2)\alpha^2 + 2RL\alpha + R^2 = 0$$

特征根

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{L \pm M}$$

所以, 齐次解为

$$i_{2h}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

2) 求特解, 由于 $t > 0$ 以后, 微分方程右端为零, 显然, 其特解为零, 所以齐次解即为完全解

$$i_2(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

3) 确定初始条件

由题意可知, $i_2(0^-) = 0, i_2'(0^-) = 0$, 下面利用奇异函数平衡法确定 $i_2(0^+)$ 和 $i_2'(0^+)$ 。

由系统的微分方程可以看出, 在等式的右端出现冲激函数项 $M\delta(t)$, 为使方程平衡, 等

式左端也应有对应的 $\delta(t)$ 函数, 而且也只能出现在最高阶项(即 $\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$ 中包含有 $\delta(t)$ 函数), 否

则若在低阶项中出现 $\delta(t)$ 函数, 则将导致冲激偶函数的出现, 将不能与右端平衡。所以可以判

断, $\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$ 中包含有 $\delta(t)$ 函数, 且为了与右端平衡, 应为 $\frac{M}{L^2 - M^2} \delta(t)$ (切记,

$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} \neq \frac{M}{L^2 - M^2} \delta(t)$, 而是包含有 $\delta(t)$ 函数), $\frac{di_2(t)}{dt}$ 为 $\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$ 的积分, 则 $\frac{di_2(t)}{dt}$ 项中应包含

$\frac{M}{L^2 - M^2} u(t)$ (即 $\frac{di_2(t)}{dt}$ 在 $t=0$ 处有一个不连续点, 即有跳变值 $\frac{M}{L^2 - M^2}$, 其导数将出现一个 $\delta(t)$

函数), 而其积分 $i_2(t)$ 在 $t=0$ 处是连续的, 不产生跳变, 可将上述平衡过程简记为

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} \xrightarrow{\text{包含}} \frac{M}{L^2 - M^2} \delta(t)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} \xrightarrow{\text{包含}} \frac{M}{L^2 - M^2} u(t)$$

$$i_2(t) \xrightarrow{\text{包含}} \frac{M}{L^2 - M^2} tu(t)$$

于是可以写出

$$\begin{cases} i_2(0^+) - i_2(0^-) = 0 \\ i_2'(0^+) - i_2'(0^-) = \frac{M}{L^2 - M^2} \end{cases}$$

由上式及已知条件可求得

$$i_2(0^+) = 0 \quad i_2'(0^+) = \frac{M}{L^2 - M^2}$$

4) 利用初始条件求系数

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = \frac{M}{L^2 - M^2} \end{cases}$$

解得

$$A_1 = \frac{M}{(L^2 - M^2)(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{1}{2R}$$

$$A_2 = -\frac{M}{(L^2 - M^2)(\alpha_1 - \alpha_2)} = -\frac{1}{2R}$$

响应为

$$i_2(t) = \frac{M}{(L^2 - M^2)(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) u(t) = \frac{1}{2R} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) u(t)$$

我们对响应 $i_2(t)$ 求导得

$$\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{\alpha_1 t}}{L+M} + \frac{e^{\alpha_2 t}}{L-M} \right] u(t)$$

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{L+M} + \frac{1}{L-M} \right] \delta(t) + \frac{1}{2} \left[-\frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t}}{L+M} + \frac{\alpha_2 e^{\alpha_2 t}}{L-M} \right] u(t)$$

可以看出, $\frac{di_2(0^+)}{dt} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{L+M} + \frac{1}{L-M} \right] = \frac{M}{L^2 - M^2}$, 而 $\frac{di_2(0^-)}{dt} = 0$, 即产生一个跳变, 而 $\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$

中包含有 $\frac{M}{L^2 - M^2} \delta(t)$ 项。

$i_2(t)$ 及 $\frac{di_2(t)}{dt}$ 的波形分别如图 2-4 (a)、(b) 所示。

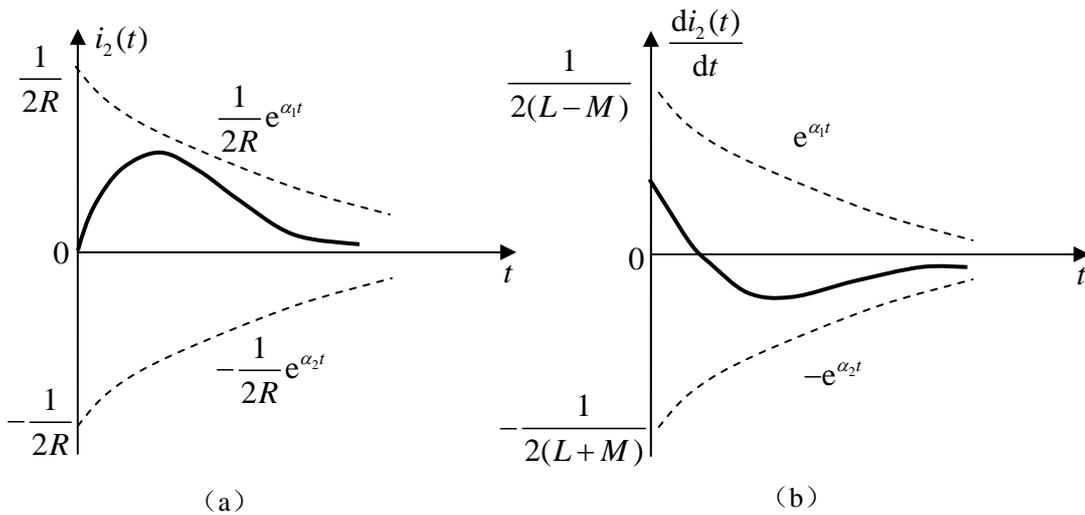


图 2-4 例 2-7 的波形

上例中，根据奇异函数平衡法由起始条件 $y^{(k)}(0^-)$ 来求初始条件 $y^{(k)}(0^+)$ ，只经过了一次匹配(方程右端只有 $\delta(t)$ 项)，较为简单。下面再举一例较复杂的例子来说明平衡过程。

例 2-8 已知微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt}$$

激励信号及起始条件分别为

$$x(t) = u(t), \quad y(0^-) = 2, \quad y'(0^-) = 3$$

试确定初始条件 $y(0^+)$ 及 $y'(0^+)$ 。

解

将 $x(t) = u(t)$ 代入原方程，则微分方程成为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \delta'(t) + 3\delta(t)$$

我们把匹配过程一步一步列写如下：

1) 先匹配最高阶项

因为方程右端奇异函数的最高阶项是 $\delta'(t)$ ，所以，方程左端最高阶项 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ 中应包含 $\delta'(t)$ 。

2) 最高阶项匹配好后对低阶项的影响

因为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ 项中包含 $\delta'(t)$ ，这样， $\frac{dy(t)}{dt}$ 中就应包含 $\delta(t)$ ， $y(t)$ 中就应包含 $u(t)$ ，考虑到 $y(t)$

项前面的系数，方程左端的 $2y(t)$ 中应有 $2u(t)$ 。

3) 匹配低阶项

方程左端有了 $\delta(t)$ ，而方程右端有 $3\delta(t)$ ，方程左右不平衡，那么，需要返回到最高阶项

$\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ 中进行补偿，也就是说， $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ 项中还应包含 $2\delta(t)$ ，才能使方程两端的 $\delta(t)$ 项相等。

这样又导致了 $\frac{dy(t)}{dt}$ 项中还应包含 $2u(t)$ ，这样方程左边有 $4u(t)$ ，右边却没有 $u(t)$ ，因此 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$

项中还存在 $-4u(t)$ 。

为清楚起见，我们用下述形式来概括整个匹配过程：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \xrightarrow{\text{包含}} \delta'(t) + 2\delta(t) - 4u(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \xrightarrow{\text{包含}} \delta(t) + 2u(t)$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{包含}} u(t)$$

这样由上述第二个式子可看出, $\frac{dy(t)}{dt}$ 在 $t=0$ 点有一个 2 的跳变量 (注意 $\delta(t)$ 不是跳变, 它只是在 $t=0$ 处的瞬时冲激), 由第三个式子看出, $y(t)$ 在 $t=0$ 点有一个 1 的跳变量。

即

$$\begin{cases} y'(0^+) - y'(0^-) = 2 \\ y(0^+) - y(0^-) = 1 \end{cases}$$

所以 $y'(0^+) = y'(0^-) + 2 = 5$
 $y(0^+) = y(0^-) + 1 = 3$

有上两例可见, 采用时域经典法求解系统微分方程时, 求初始条件 $\mathbf{y}^{(k)}(0^+)$ 的过程有些麻烦, 特别当阶次较高, 且激励信号的奇异函数较复杂时, 求初始条件非常困难。所以, 在线性系统分析中, 常采用其它分析方法以避免求 $\mathbf{y}^{(k)}(0^+)$ 这一步, 具体方法在后面加以讨论。

2. 2 零输入响应与零状态响应

从上节分析可知, 系统的解可以分解为齐次解 $y_h(t)$ 和特解 $y_p(t)$ 。由于齐次解的函数依赖于系统本身特性, 与激励函数的形式无关(虽然系数 A 与激励信号有关), 所以齐次解也称为自由响应 (natural response), 而特解的形式是由激励函数决定, 所以 $y_p(t)$ 也称为系统的强迫响应 (forced response)。

线性系统可以根据需要分解为其它的形式, 以方便计算或适应不同的物理解释。其中分解为零输入响应和零状态响应是重要的一种。

2. 2. 1 零输入响应与零状态响应

零输入响应 (zero-input response): 没有外加激励信号的作用, 只由起始状态 (起始时刻系统的储能) 所产生的响应。一般用 $y_{zi}(t)$ 表示。

零状态响应 (zero-state response): 不考虑起始时刻系统的储能的作用(起始状态为零), 由系统的外部激励信号所产生的响应。一般用 $y_{zs}(t)$ 表示。

由式(2-2)可知, 系统的全响应为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

当特征方程无重根时, 一般形式为

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} + y_p(t)$$

对于 $y_{zi}(t)$, 由于外部激励为零, 则 $y_{zi}(t)$ 中不包含 $y_p(t)$, 所以 $y_{zi}(t)$ 的形式与齐次解相同

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t} \quad (2-7)$$

由于外部没有加激励，所以系统的储能没有发生变化，所以 $\mathbf{y}_{zi}^{(k)}(0^+) = \mathbf{y}_{zi}^{(k)}(0^-) = \mathbf{y}^{(k)}(0^-)$ ，也就是说，只要用起始状态 $\mathbf{y}^{(k)}(0^-)$ 来确定 $y_{zi}(t)$ 中的系数 A_{zik} 。

对于 $y_{zs}(t)$ ，由于不考虑起始时刻系统的储能的作用，即 $\mathbf{y}_{zs}^{(k)}(0^-) = 0$ ，这时 $y_{zs}(t)$ 的形式为

$$y_{zs}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{\alpha_k t} + y_p(t) \quad (2-8)$$

虽然 $\mathbf{y}_{zs}^{(k)}(0^-) = 0$ ，但由于激励 $x(t)$ 的加入，系统的初始状态可能会产生跳变，使得 $\mathbf{y}_{zs}^{(k)}(0^+) \neq 0$ ，因此，求零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的系数 A_{zsk} 要用跳变量 $\mathbf{y}_{zi}^{(k)}(0^+) = \mathbf{y}^{(k)}(0^+) - \mathbf{y}^{(k)}(0^-)$ 来确定。这样，全响应可以写成

$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{\alpha_k t}}_{\text{零状态响应}} + y_p(t) = \quad (2-9)$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n (A_{zik} + A_{zsk}) e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫响应}} \quad (2-10)$$

可以看出，两种分解方法有着明显的区别，虽然自由响应 $y_h(t)$ 与零输入响应 $y_{zi}(t)$ 都能满足齐次方程的解，但 A_k 是由系统的初始条件 $\mathbf{y}^{(k)}(0^+)$ 和外部激励 $x(t)$ 共同决定的，而 A_{zik} 仅仅由系统的起始储能 $\mathbf{y}^{(k)}(0^-)$ 决定。在起始条件为零的条件下，必然有 $y_{zi}(t) = 0$ ，但 $y_{zs}(t)$ 不为零，而且 $y_{zs}(t)$ 中所包含的自由响应分量一般也不为零。也就是说，自由响应也可以分解为两部分，一部分由系统的起始储能产生，另一部分由激励信号产生。当系统的起始状态为零时，前一部分为零时，后一部分仍可存在。

例2-9 系统的微分方程为

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 3u(t)$$

且 $y(0^-) = \frac{3}{2}$ ，求自由响应、强迫响应、零输入响应、零状态响应和完全响应。

解

1) 求齐次解，由特征方程可方便地获得特征根为 $\alpha = -3$ ，所以

$$y_h(t) = Ae^{-3t}$$

而

$$y_p(t) = 1$$

所以完全响应为

$$y(t) = Ae^{-3t} + 1 \quad (t > 0)$$

由微分方程式两端奇异函数平衡条件可以判断， $y(t)$ 在起始点无跳变， $y(0^+) = y(0^-) = \frac{3}{2}$ 。利用 $y(0^+)$ 可求出系数 $A = \frac{1}{2}$ ，所以

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} + 1 \quad (t > 0)$$

$$y_h(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}, y_p(t) = 1$$

2) 求零输入响应, 这时

$$y_{zi}(t) = A_{zi}e^{-3t}$$

借助 $y(0^-) = \frac{3}{2}$ 可获得 $A_{zi} = \frac{3}{2}$, 于是有

$$y_{zi}(t) = \frac{3}{2}e^{-3t}$$

再求零状态响应, 其形式为

$$y_{zs}(t) = A_{zs}e^{-3t} + 1$$

这时令 $y_{zs}(0^+) = 0$ (起始点无跳变) 代入到 $y_{zs}(t)$ 中, 可以得到 $A_{zs} = -1$, 所以得到

$$y_{zs}(t) = -e^{-3t} + 1$$

这样, 全响应可分解为

$$y(t) = \underbrace{\frac{3}{2}e^{-3t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{-e^{-3t} + 1}_{\text{强迫响应}}$$

$$y(t) = \underbrace{\frac{3}{2}e^{-3t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{-e^{-3t} + 1}_{\text{零状态响应}}$$

2. 2. 2 系统响应的线性特性分析

在上一章中曾指出, 线性时不变系统必须满足均匀性与叠加性及微积分特性。但这种线性时不变特性是在一定条件下满足的。下面举例说明。

若系统的微分方程为

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

起始状态 $y(0^-) = 2$ 时, 则系统对激励 $x_1(t) = e^{-t}$ 的响应 $y_1(t)$ 为

$$y_1(t) = e^{-2t} + e^{-t}$$

若把激励信号乘以 5, 即 $x_2(t) = 5e^{-t}$, 则响应 $y_2(t)$ 可以求得为

$$y_2(t) = -3e^{-2t} + 5e^{-t}$$

很明显, $y_2(t) \neq 5y_1(t)$, 不符合均匀性的要求, 但不能据此说明该系统是一个非线性系统。产生这一现象的原因在于, 虽然系统的激励被放大, 但是系统的起始储能 $y(0^-)$ 没有随着外部激励而变化, 所以导致系统的全响应不满足线性特性。

那么我们将系统的响应分为零输入响应和零状态响应来分别计算, 根据微分方程和起始状态可以容易获得在 $x_1(t) = e^{-t}$ 及 $y(0^-) = 2$ 的条件下, 系统的响应为

$$y_1(t) = \underbrace{2e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(-e^{-2t} + e^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

而在 $x_2(t) = 5e^{-t}$ 和 $y(0^-) = 2$ 的条件下, 响应为

$$y_2(t) = \underbrace{2e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{5(-e^{-2t} + e^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

比较 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 可见, 零状态响应满足线性系统的特性。

若把 $y(0^-)$ 也按照同样的比例放大得 $y(0^-) = 10$, 则在 $x_2(t) = 5e^{-t}$ 激励下, 响应为

$$y_3(t) = \underbrace{10e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + 5 \underbrace{(-e^{-2t} + e^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

可见，这时 $y_3(t)$ 与 $y_1(t)$ 满足了线性系统的均匀性，但是这是以改变系统的起始储能为条件的。

从上面的例子可以说明常系数线性微分方程描述的系统在下面几点上是线性的。

1) 响应的可分解性：系统响应可分解为零输入响应和零状态响应；

2) 零状态响应线性：系统的零状态响应对于各激励信号呈线性，且系统也为时不变系统，所以零状态响应满足微积分特性，即激励为 $x(t)$ 时，零状态响应为 $y_{zs}(t)$ ，而激励为 $x(t)$ 的微分或积分时，零状态响应也为 $y_{zs}(t)$ 的微分或积分；

3) 零输入响应线性：系统的零输入响应对于各起始状态呈线性。

现在我们已讨论了将响应分解为零输入响应和零状态响应的方法及求解方法，讨论了线性特性，从讨论中可看出，求零输入响应比较简单，而求零状态响应比较复杂。这种分解方法为现代时域分析方法——卷积分析法提供了途径。

2.3 冲激响应与阶跃响应

2.3.1 定义

冲激响应 (impulse response)：以单位冲激信号 $\delta(t)$ 作为激励，系统产生的零状态响应称为“单位冲激响应”，或简称“冲激响应”。通常用 $h(t)$ 表示。

阶跃响应 (step response)：以单位阶跃信号 $u(t)$ 作为激励，系统产生的零状态响应称为“单位阶跃响应”，或简称“阶跃响应”。通常用 $g(t)$ 表示。

我们对这两种响应感兴趣的第一个原因是冲激函数和阶跃函数是两种典型信号，求这两种信号引起的零状态响应是线性系统分析中常见的典型问题。第二个原因是为用卷积积分分析系统的零状态响应作准备。我们前面介绍过，信号可以分解为阶跃信号或冲激信号的组合，这样可以借助于冲激响应或阶跃响应分析系统的零状态响应。另一方面， $h(t)$ 还与今后将要介绍的系统函数及系统的稳定性等许多系统的特性有关。所以 $h(t)$ 和 $g(t)$ 是系统的两个重要响应。

2.3.2 $h(t)$ 的求解

若系统的微分方程为

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

在 $x(t) = \delta(t)$ 时求得的零状态响应即为 $h(t)$ 。当把 $x(t) = \delta(t)$ 代入微分方程，则在方程的右端将出现 $\delta(t)$ 及其各阶导数，为保证方程两端奇异函数平衡，则 $h(t)$ 中是否包含有 $\delta(t)$ 及导数

将和 n 与 m 的相对大小有关。一般有 $n > m$ ，在这种情况下，方程右端最高阶次为 $\frac{d^m \delta(t)}{dt^m}$ ，为

与之相匹配, 则 $\frac{d^n h(t)}{dt^n}$ 中应包含有 $\frac{d^m \delta(t)}{dt^m}$, 则 $\frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}}$ 中应包含有 $\frac{d^{m-1} \delta(t)}{dt^{m-1}}$, 以此类推, $\frac{d^{n-m} h(t)}{dt^{n-m}}$

将包含有 $\delta(t)$, 而 $\frac{d^{n-m-1} h(t)}{dt^{n-m-1}} \dots \frac{dh(t)}{dt}$ 、 $h(t)$ 中将不包含有 $\delta(t)$ 函数。在 $n=m$ 的情况下, $h(t)$ 中

将包含有 $\delta(t)$ 信号, 而在 $n < m$ 时, $h(t)$ 中除含有 $\delta(t)$ 外还将有 $\delta(t)$ 的导数。今后我们可以看到, 为保证系统稳定, 有 $n \geq m$ 的要求。这里我们仅讨论 $n > m$ 的情况。

由定义可知, $\delta(t)$ 及其各阶导数在 $t > 0$ 时都为零, 于是 $h(t)$ 的形式应与齐次解的形式相同, 不包含特解。若系统的特征方程共有 n 个非重根, 则

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} \right) u(t) \quad (2-11)$$

这说明 $\delta(t)$ 的加入, 在 $t=0$ 时刻引起了系统储能的变化, 而在 $t > 0$ 以后, 外部激励将不存在, 这样只有冲激信号引起的系统储能起作用, 所以 $h(t)$ 必然与齐次解形式相同。

剩下的问题是确定系数 A_k 。由于系统的起始状态为零, 即 $h(0^-) = h'(0^-) = \dots = h^{(n-1)}(0^-) = 0$, 我们可以利用 2.1 节所述的奇异函数平衡法来求出初始条件 $h(0^+)$ 、 $h'(0^+) \dots h^{(n-1)}(0^+)$, 从而代入式(2-11)来确定系数 A_k 。但这种方法求解过程比较麻烦, 容易引起错误。现在, 我们再介绍一种确定 A_k 的方法, 即将 $h(t)$ 的表达式(2-11)及 $h(t)$ 的各阶导数代入微分方程, 使方程两端奇异函数的系数相匹配, 从而求出 A_k , 下面将举例说明。

例2-10 系统的微分方程为

$$(L^2 - M^2) \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 2RL \frac{di_2(t)}{dt} + R^2 i_2(t) = M \frac{du(t)}{dt}$$

试求其冲激响应。

解

首先求其特征根为

$$\alpha_1 = -\frac{R}{L+M}, \quad \alpha_2 = -\frac{R}{L-M}$$

于是有

$$h(t) = (A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}) u(t)$$

对 $h(t)$ 逐次求导得到

$$\frac{dh(t)}{dt} = (A_1 + A_2) \delta(t) + (A_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) u(t)$$

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = (A_1 + A_2) \delta'(t) + (A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2) \delta(t) + (A_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + A_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 t}) u(t)$$

将 $h(t)$ 、 $\frac{dh(t)}{dt}$ 、 $\frac{d^2 h(t)}{dt^2}$ 代入微分方程, 利用奇异函数平衡的原则, 令左右两端对应的奇

异函数项系数相等, 可以得到

$$\begin{cases} (L^2 - M^2)(A_1 + A_2) = M \\ 2RL(A_1 + A_2) + (L^2 - M^2)(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2) = 0 \end{cases}$$

可以解得

$$A_1 = -\frac{1}{2(L+M)}, \quad A_2 = -\frac{1}{2(L-M)}$$

于是，冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\alpha_2 t}}{L-M} - \frac{e^{\alpha_1 t}}{L+M} \right) u(t)$$

这里我们采用了将 $h(t)$ 直接代入方程的方法求系数，避免了求 $h(0^+)$ 、 $h'(0^+)$... 等初始条件的问题。

2. 3. 3 阶跃响应 $g(t)$ 的求法

$g(t)$ 的形式与微分方程两端的阶次有关，在 $n \geq m$ 的情况下， $g(t)$ 中将不包含冲激函数。而且 $g(t)$ 是由自由响应和强迫响应构成，当特征方程有 n 个非重根时， $g(t)$ 的形式为

$$g(t) = \left(\sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} + B \right) u(t) \quad (2-12)$$

其中 B 为常数，可用待定系数法求特解的方法确定。而 A_k 可以用代入微分方程然后用奇异函数平衡的方法确定，与求 $h(t)$ 的方法类似。这里就不详细举例介绍。

根据线性时不变系统的特性， $h(t)$ 与 $g(t)$ 之间有一定的依从关系。由于 $\delta(t)$ 是 $u(t)$ 的微分，而 $u(t)$ 是 $\delta(t)$ 的积分，所以 $h(t)$ 和 $g(t)$ 也满足微积分关系，即有

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (2-13)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2-14)$$

那么知道 $h(t)$ 和 $g(t)$ 中的任一个，另一个就可以方便地获得。

2. 4 系统的卷积积分分析

从以上的分析可以看出，用经典法求零状态响应比较复杂，特别当激励函数较复杂和系统的阶次较高时，求解将十分困难。而求 $h(t)$ 则相对容易。那么就可以利用信号的分解原理，将信号分解为冲激信号的组合，然后将这些冲激信号分别通过线性系统，得到各个冲激信号所对应的冲激响应，再利用线性时不变系统的线性特性和时不变特性，将各冲激响应叠加就得到零状态响应。这就是系统的卷积积分分析的基本原理。

卷积积分是分析线性时不变系统的一个重要工具，随着信号与系统理论研究的深入以及计算机技术的发展，卷积积分得到了更为广泛的应用。我们在学习卷积积分分析时，不仅要掌握卷积积分的计算方法，而且还要理解卷积的物理概念，这样对掌握线性时不变系统的分析方法有

帮助。

2. 4. 1 卷积积分

数学上一种称为卷积积分的运算是两个具有相同变量 t 的函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 经过以下的积分可得到第三个相同变量的函数 $s(t)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (2-15)$$

卷积常用简写符号 “*” 表示，于是式 (2-15) 可写作

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t) \quad (2-16)$$

积分限 $-\infty \sim \infty$ 是对一般函数的表达式，对于具体的函数，要根据具体函数的定义区间来选择积分限。下面可以具体根据 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的定义区间来确定卷积积分的积分限。

若当 $t < 0$ 时， $f_1(t) = 0$ ，也即当 $\tau < 0$ 时， $f_1(\tau) = 0$ ，这样有 $f_1(\tau) f_2(t - \tau) = 0$ ，于是式(2-16)的积分限的下限应从零开始，于是有

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (2-17)$$

在另一种情况下，若 $f_1(t)$ 不受到限制，即 $f_1(t)$ 的范围为 $-\infty$ 到 ∞ ，而当 $t < 0$ 时 $f_2(t) = 0$ ，也即 $t - \tau < 0$ (即 $\tau > t$) 时， $f_2(t - \tau) = 0$ ，这样当 $\tau > t$ 时有 $f_1(\tau) f_2(t - \tau) = 0$ ，于是式(2-16)的积分限的上限应到 t 为止，于是有

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (2-18)$$

在第三种情况下，当 $t < 0$ 时， $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 均为零，则可以根据式 (2-17) 和式 (2-18) 得到

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (2-19)$$

从上面三种情况可以看出，卷积积分的积分限要根据具体函数的定义域来确定，而且还要根据 t 的变化而改变积分限。

2. 4. 2 借助于冲激响应和叠加原理求系统的零状态响应

设系统的激励为 $x(t)$ ，而线性时不变系统的冲激响应为 $h(t)$ ，且 $x(t)$ 、 $h(t)$ 均为因果信号，即当 $t < 0$ 时，有 $x(t) = 0$ ， $h(t) = 0$ 。根据第 1 章式(1-67)和式(1-68)，信号 $x(t)$ 可以分解为 $\delta(t)$ 的线性组合，即

$$x(t) = \int_0^t x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \Delta t$$

因为对于 $\delta(t)$ 的零状态响应为 $h(t)$ ，则根据时不变特性，对于 $\delta(t - \Delta t)$ 的零状态响应则为 $h(t - \Delta t)$ ，又根据齐次性，对于 $x(k\Delta t) \delta(t - \Delta t) \Delta t$ 的零状态响应为 $x(k\Delta t) h(t - \Delta t) \Delta t$ ，最后，根据叠加性，对于激励 $x(t)$ 的零状态响应则为

$$y_{zs}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n x(k\Delta t) h(t - k\Delta t) \Delta t$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，可将 Δt 写成 $d\tau$ ，而 $k\Delta t$ 可写作 τ ，同时对各项取和将转化成取积分，即

$$y_{zs}(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (2-20)$$

即系统的零状态响应恰为 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分。由于 $x(t)$ 与 $h(t)$ 均为因果信号，因此积分限是前述第三种情况，即式(2-19)的情况，若 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的定义域不同，则积分限将有所变化。

卷积积分的物理概念就是将激励信号分解为一系列冲激信号的组合，然后让这些冲激信号依次通过系统，得到一系列的冲激响应，然后将这些冲激响应叠加起来，从而得到了系统的零状态响应。

根据卷积积分的物理意义，可以确定一个系统零状态响应的的时间范围。若 $h(t)$ 的时间范围为 $t_1 \leq t \leq t_2$ ，而激励信号 $x(t)$ 的时间范围为 $t_3 \leq t \leq t_4$ 。则可以这样分析， $h(t)$ 是在 $t=0$ 时加一个激励信号 $\delta(t)$ 所得到的响应，其响应起始于 t_1 ，结束于 t_2 ，而 $x(t)$ 可以分解为 $\delta(t)$ 信号的组合，且信号的起始点为 $t=t_3$ ，则可以等效为在 $t=t_3$ 时加一个冲激信号，则响应信号的起始点为 t_3+t_1 ，而信号结束于 t_4 ，即等效为 $t=t_4$ 时加入一个冲激，则此冲激所对应的响应起始于 t_4+t_1 ，结束于 t_3+t_2 ，即响应信号 $y(t)$ 的范围为 $t_3+t_1 \leq t \leq t_4+t_2$ 。这样可以用此方法判断卷积积分的范围。这里 t_1 、 t_2 可为正、为负，若 t_1 为正，则此系统为一个因果系统，若 t_1 为负，则系统为非因果系统。

利用卷积求零状态响应，再与零输入响应相加即得到全响应，表达式如下

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t} + \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2-21)$$

式中，第一项为零输入响应[引用式(2-7)]， α_k 为特征根，共 n 个且无重根，系数 A_{zik} 由系统的起始状态 $\mathbf{y}^{(k)}(0^-)$ 决定，而第二项是卷积积分，积分限从 0^- 开始。

2. 4. 3 卷积积分的图解法

卷积积分的图解说明可以帮助我们理解卷积的概念，把一些抽象的关系形象化。

如果给定 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ，要求二函数的卷积积分 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，首先要改变自变量，即将 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 变为 $f_1(\tau)$ 、 $f_2(\tau)$ ，这时函数图形与原来一样，只是横坐标 t 变为 τ 。然后再经过如下四个步骤（称为四步曲）：（1）反褶，即将 $f_2(\tau)$ 进行反褶，变为 $f_2(-\tau)$ ；（2）时移，即将 $f_2(-\tau)$ 时移 t 成为 $f_2(t-\tau) = f_2[-(\tau-t)]$ ，当 $t > 0$ 时，将 $f_2(-\tau)$ 右移 t ，而当 $t < 0$ 时，将 $f_2(-\tau)$ 左移 t ；（3）相乘，即将 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(t-\tau)$ 相乘得到 $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$ ；（4）积分，即将乘积 $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$ 进行积分，积分的关键是确定积分限。一般是将 $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$ 不等于零的区间作为积分的上、下限，而且当 t 取不同的值时，不为零的区间有所变化，因此要将 t 分成不同的区间来求卷积积分。下面举例说明卷积积分的图解法过程。

例 2-11 已知 $f_1(t) = u(t)$ ， $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ 求 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，并画出 $s(t)$ 的波形。

解 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的波形如图 2-5 所示（图中同时标注了 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(\tau)$ ）。

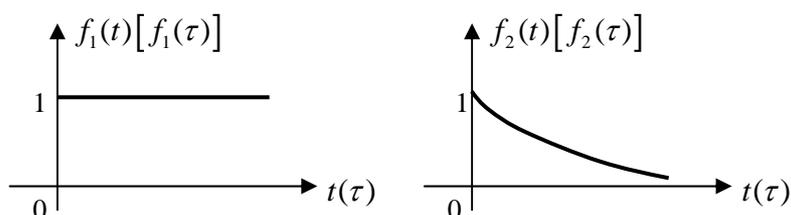


图 2-5 例 2-11 的信号

因为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

所以需要将 $f_2(\tau)$ 反褶成 $f_2(-\tau)$ ，如图 2-6 所示，然后进行时移，当时移量 t 为不同的值时，积分结果是不同的，为此要分为不同的区间进行分析。

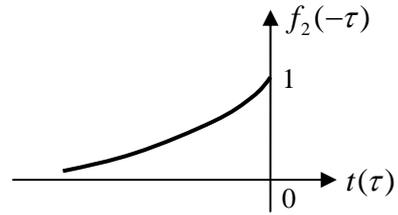


图 2-6 $f_2(-\tau)$ 的波形

(1) 当 $t \leq 0$ 时， $f_2(t-\tau)$ 的波形如图 2-7(a) 所示（图中同时画出了 $f_1(\tau)$ 的波形），这时 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(t-\tau)$ 无重叠部分，因此 $f_1(\tau) f_2(t-\tau) = 0$ ，从而

$$s(t) = f_1(t) * f_2(t) = 0$$

(2) 当 $t \geq 0$ 时， $f_2(t-\tau)$ 与 $f_1(\tau)$ 的波形如图 2-7(b) 所示，这时 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(t-\tau)$ 的重叠区域为 $[0, t]$ ，因此

$$s(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}$$

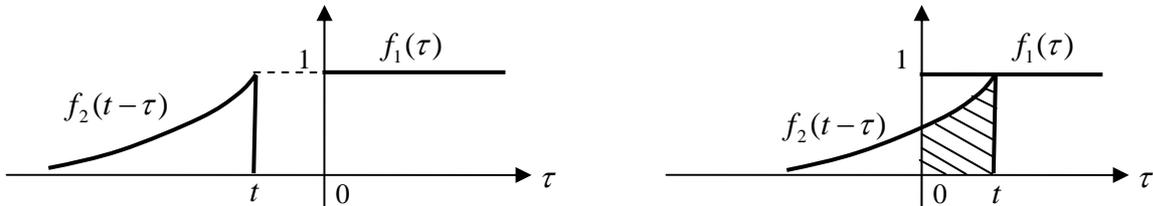


图 2-7 卷积积分的图解法过程

归纳以上结果

$$s(t) = f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

$s(t)$ 的波形如图 2-8 所示。

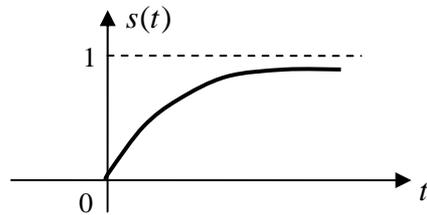


图 2-8 $s(t)$ 的波形

例 2-12 已知 $f_1(t) = u(t) - u(t-T)$ ， $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ ，求 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，并画出 $s(t)$ 的波形。

解

图 2-9 (a)、(b)、(c) 分别画出了

$f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 及 $f_1(\tau)$ 、 $f_2(\tau)$ 和 $f_2(-\tau)$ 的波形。按 t 的不同取值可按如下区间进行分析。

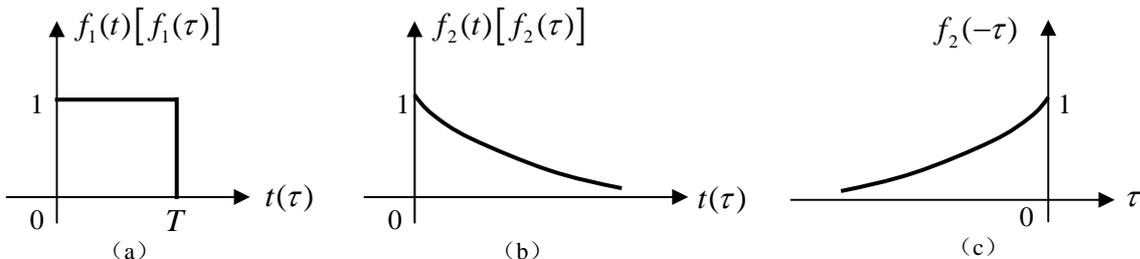


图 2-9 例 2-12 的信号波形

(1) 当 $t \leq 0$ 时， $f_2(t-\tau)$ 及 $f_1(\tau)$ 的波形如图 2-10 (a) 所示，由图可知，此时 $f_2(t-\tau)$ 与

$f_1(\tau)$ 没有重叠部分, 所以 $f_1(\tau) f_2(t-\tau) = 0$, 即

$$s(t) = 0$$

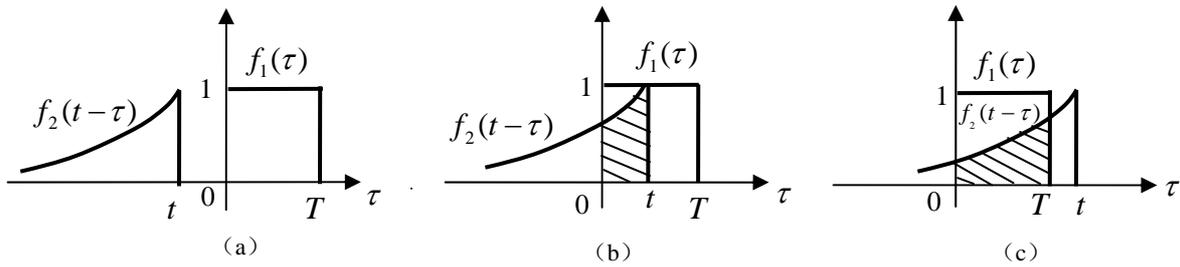


图 2-10 卷积积分的图解法过程

(2) 当 $0 \leq t \leq T$ 时, $f_2(t-\tau)$ 及 $f_1(\tau)$ 的波形如图 2-10(b)所示, 此时 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(t-\tau)$ 的重叠区域为 $[0, t]$, 所以

$$s(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}$$

(3) 当 $t \geq T$ 时, $f_2(t-\tau)$ 与 $f_1(\tau)$ 的波形如图 2-10(c)所示, 此时 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(t-\tau)$ 的重叠区域为 $[0, T]$, 所以

$$s(t) = \int_0^T 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-T)} - e^{-t}$$

归纳以上结果得

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 \leq t \leq T \\ e^{-(t-T)} - e^{-t} & t \geq T \end{cases}$$

$$= (1 - e^{-t})[u(t) - u(t-T)] + [e^{-(t-T)} - e^{-t}]u(t-T)$$

$$= (1 - e^{-t})u(t) - [1 - e^{-(t-T)}]u(t-T)$$

$s(t)$ 的波形如图 2-11 所示。

例 2-13 已知 $x(t) = u(t + \frac{1}{2})$

$$-u(t-1), \quad h(t) = \frac{t}{2}[u(t) - u(t-2)],$$

求 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。

解

图 2-12 给出了 $x(t)$ 、 $h(t)$ 及 $x(\tau)$ 、 $h(\tau)$ 和 $h(-\tau)$ 、 $h(t-\tau)$ 的波形。

然后将 t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化, 求 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘后不为零的区间, 并求二信号相乘后的函数 $x(\tau) h(t-\tau)$ 的线下面积, 并要注意在不同 t 值时不为零的区间的变化, 卷积积分的结果如下:

1) $t < -\frac{1}{2}$, 如图 2-13 (a) 所示。

$$x(\tau) h(t-\tau) = 0, \quad y(t) = 0$$

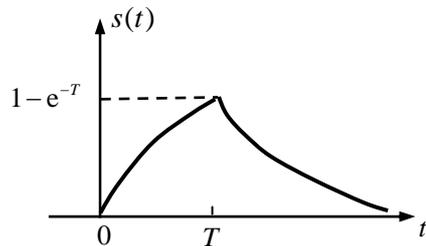


图 2-11 $s(t)$ 的波形

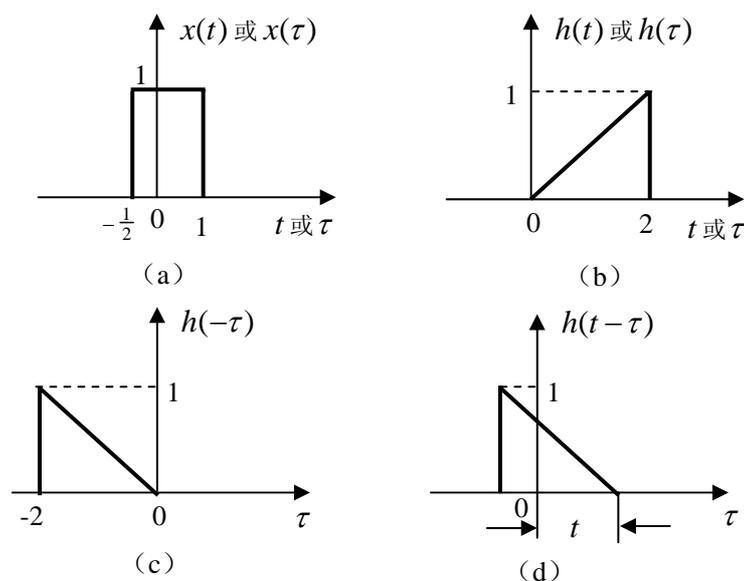


图 2-12 例 2-13 信号及反褶时移波形

2) $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, 如图 2-13 (b) 所示。

$x(\tau) h(t-\tau) = \frac{1}{2}(t-\tau)$ 不为零的区间为 $-\frac{1}{2} \leq \tau \leq t$

$$y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^t \frac{1}{2}(t-\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2}t\tau - \frac{1}{4}\tau^2 \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^t = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{16}$$

3) $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$, 如图 2-13 (c) 所示。

$x(\tau) h(t-\tau) = \frac{1}{2}(t-\tau)$ 不为零的区间为 $-\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$

$$y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}(t-\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2}t\tau - \frac{1}{4}\tau^2 \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{4}t - \frac{3}{16}$$

4) $\frac{3}{2} \leq t \leq 3$, 如图 2-13 (d) 所示。

$x(\tau) h(t-\tau) = \frac{1}{2}(t-\tau)$ 不为零的区间为 $t-2 \leq \tau \leq 1$

$$y(t) = \int_{t-2}^1 \frac{1}{2}(t-\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2}t\tau - \frac{1}{4}\tau^2 \right) \Big|_{t-2}^1 = \frac{3}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}$$

5) $t > 3$, 如图 2-13 (e) 所示。

$$x(\tau) h(t-\tau) = 0 \quad y(t) = 0$$

所以

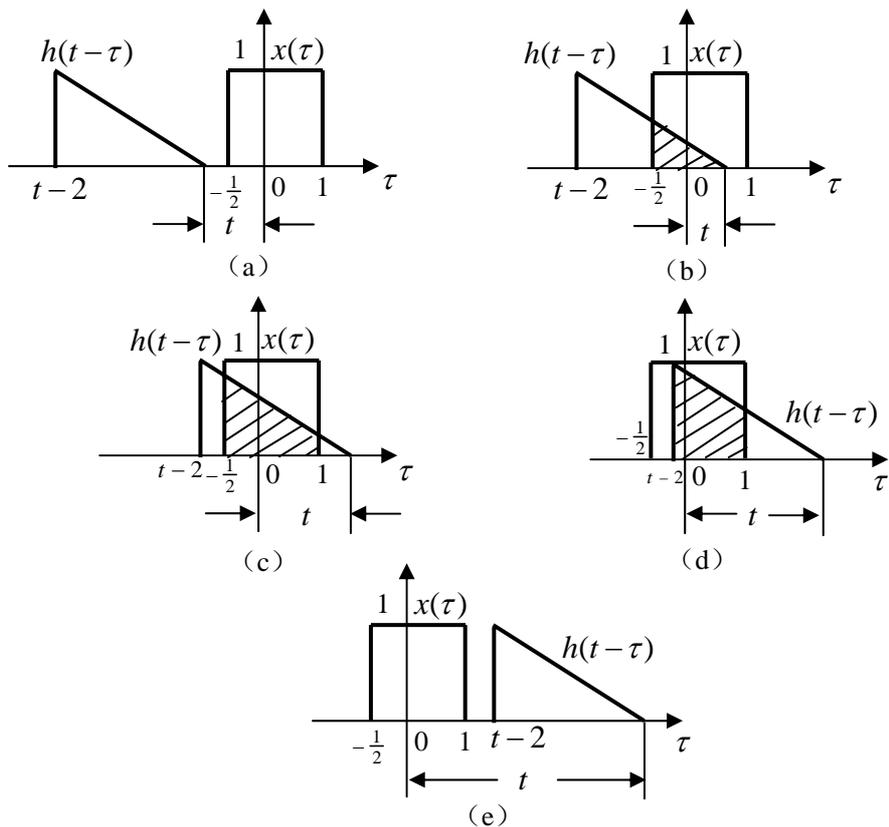


图 2-13 卷积积分的图解求解过程

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{16} & -\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ \frac{3}{4}t - \frac{3}{16} & 1 \leq t \leq \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} & \frac{3}{2} \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

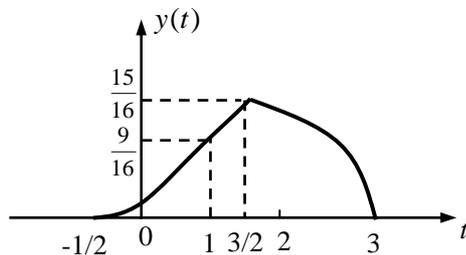


图 2-14 例 2-13 的波形

$y(t)$ 的波形如图 2-14 所示。

2. 5 卷积积分的性质

卷积积分有许多重要性质，这些性质一方面反映出线性时不变系统的特性，另一方面可利用这些性质使运算简化。

2. 5. 1 卷积积分的代数性质

1. 交换律 (commutative law)

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2-22)$$

此性质采用积分变量代换即可方便证明。该性质说明，函数在卷积积分中的次序是可以任意交换的。此定律的物理意义是：线性时不变系统的激励信号与系统冲激响应之间有互易性，即把激励信号 $x(t)$ 作为另一个系统的冲激响应 $h_1(t)$ ，而系统的冲激响应 $h(t)$ 当作另一个系统的

激励 $x_1(t)$ ，所得响应不变。从图解法解释就是交换二重积分的次序，即保持 $h(\tau)$ 不变，而将 $x(\tau)$ 进行反褶并时移，这样 $h(\tau)$ 与 $x(t-\tau)$ 相乘以后所得函数的线下面积与 $x(\tau) h(t-\tau)$ 的线下面积相同，即卷积积分相等。

2. 分配律 (distributive law)

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (2-23)$$

这个定律根据定义很容易证明。其物理意义是：系统对几个相加信号的零状态响应等于几个信号分别通过系统的零状态响应之和。也可以认为一个激励信号通过多个系统所得零状态响应之和等效于该激励信号通过这多个系统之和的零状态响应，这与线性时不变系统的叠加特性是一致的。

从分配律还可以得到如下结论：若将两个冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的子系统并联，则并联系统总的冲激响应为

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

如图 2-15 所示。

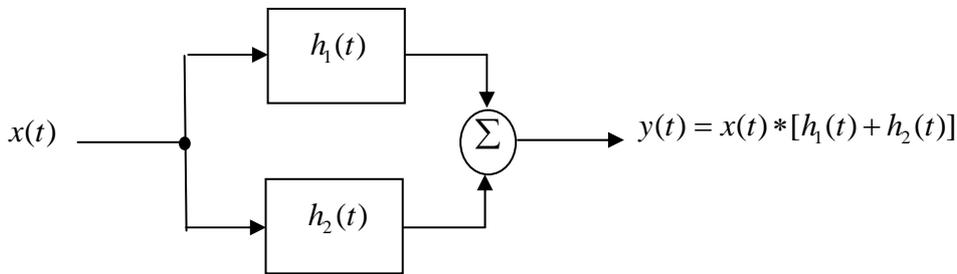


图 2-15 并联系统的冲激响应

3. 结合律 (associative law)

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \quad (2-24)$$

证明

根据定义

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\tau - \lambda) d\lambda \right] f_3(t - \tau) d\tau$$

交换积分次序并进行变量置换，上式为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau - \lambda) f_3(t - \tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) f_3(t - \lambda - u) du \right] d\lambda = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) f_3[(t - \lambda) - u] du \right] d\lambda = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) s_{23}(t - \lambda) d\lambda = \\ & f_1(t) * s_{23}(t) \end{aligned}$$

这里

$$s_{23}(t) = f_2(t) * f_3(t)$$

从结合律可以得到如下结论：若将两个冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的子系统串联，则串

联系系统总的冲激响应为

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

如图 2-16 所示。

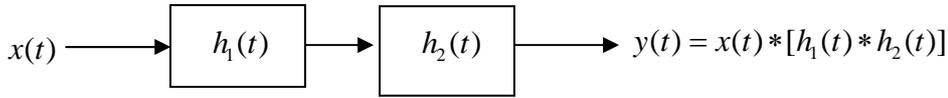


图 2-16 串联系统的冲激响应

2.5.2 卷积积分的微分与积分

两函数卷积后的微分与积分等于其中一个函数的微分与另一个函数的卷积，其表达式为

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} \quad (2-25)$$

证明

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \frac{df_2(t - \tau)}{dt} d\tau = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} \end{aligned}$$

利用交换律同样可以证明另一式。

两函数相卷积后的积分等于其中一个函数的积分与另一函数的卷积，即

$$\int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda = f_1(t) * \left[\int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \right] = \left[\int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right] * f_2(t) \quad (2-26)$$

证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda &= \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\lambda - \tau) d\tau \right] d\lambda = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^t f_2(\lambda - \tau) d\lambda \right] d\tau = \\ & f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

利用交换律同样可证另一式。

经过类似的推导可以导出卷积积分的高阶导数或多重积分之运算规律。

设 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，则

$$s^{(i)}(t) = f_1^{(j)}(t) * f_2^{(i-j)}(t) \quad (2-27)$$

这里， i, j 取正整数时为导数的阶次，取负整数时为重积分的次数。一个常用的例子是

$$f_2(t) * f_3(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \left[\int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \right] = \left[\int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right] * \frac{df_2(t)}{dt} \quad (2-28)$$

用此式可以使卷积积分简化运算。

2.5.3 与冲激函数或阶跃函数的卷积

函数 $f(t)$ 与冲激信号 $\delta(t)$ 的卷积仍为 $f(t)$ 本身，即

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (2-29)$$

由卷积定义及 $\delta(t)$ 的性质，上式很容易证明。

此外还有

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (2-30)$$

即信号 $f(t)$ 与 $\delta(t - t_0)$ 的卷积相当于把信号 $f(t)$ 延迟 t_0 。

此外，利用卷积的微分、积分特性可得到以下结论：

与单位阶跃函数 $u(t)$ 的卷积可得

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \quad (2-31)$$

推广到一般情况可得

$$f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) \quad (2-32)$$

$$f(t) * \delta^{(k)}(t - t_0) = f^{(k)}(t - t_0) \quad (2-33)$$

式中 k 表示求导或取重积分的次数，当 k 取正整数时表示导数阶次， k 取负整数为重积分的次数。

利用信号 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 卷积的特性式(2-29)及微积分特性式(2-28)，可以使卷积积分的计算变得比较简单。下面举例说明。

例 2-14 已知 $f_1(t) = u(t) - u(t - 2)$, $f_2(t) = 2[u(t) - u(t - 3)]$ ，求 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

解

$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的波形如图 2-17 所示。

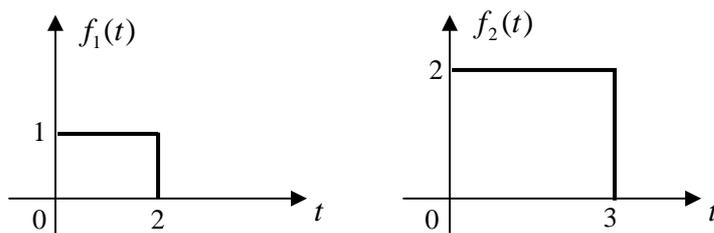


图 2-17 例 2-14 的信号波形

对 $f_1(t)$ 进行微分，而对 $f_2(t)$ 进行积分，则

$$\frac{df_1(t)}{dt} = \delta(t) - \delta(t - 2)$$

$$F_2(t) = \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = 2t[u(t) - u(t - 3)] + 6u(t - 3)$$

$\frac{df_1(t)}{dt}$ 及 $F_2(t)$ 的波形如图 2-18 所示，则

$$s(t) = f_1(t) * f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = [\delta(t) - \delta(t - 2)] * F_2(t) = F_2(t) - F_2(t - 2)$$

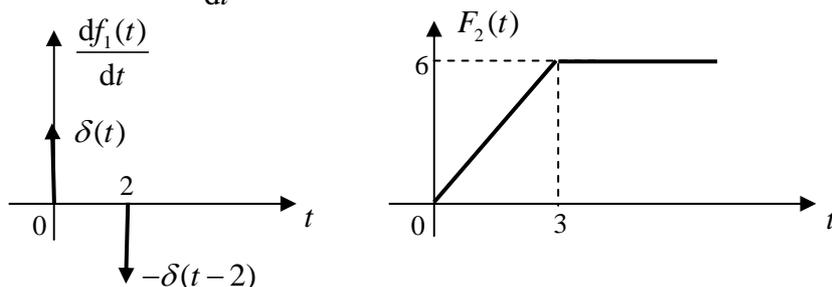


图 2-18 二信号微分和积分的波形

则合成波形如图 2-19 所示。

从例 2-14 可以看出，利用式 (2-28) 来间接计算两函数的卷积比较简单。但要注意，式 (2-28) 并不适合于任何函数。只有当求导数的函数（例如 $f_1(t)$ ）的导数 $\frac{df_1(t)}{dt}$ ，再经积分 $\int_{-\infty}^t \frac{df_1(\tau)}{d\tau} d\tau$ 后，能够回到原函数 $f_1(t)$ 的情况下，才能使用式 (2-28) 来求两函数的卷积，否则就不能直接使用该式。

2.5.4 卷积积分的时移特性

若

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

则

$$\begin{aligned} f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) &= f_1(t-t_2) * f_2(t-t_1) = \\ &= f(t-t_1-t_2) \end{aligned} \quad (2-34)$$

例 2-15 已知 $f_1(t) = u(t)$, $f_2(t) = e^{-(t-1)}u(t-1)$,

求 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，并画出 $s(t)$ 的波形。

解

该例与例 2-11 作比较可知，两例中的 $f_1(t)$ 相同，而本例中的 $f_2(t)$ 是将例 2-11 中的 $f_2(t)$ 右移 1 得到的，所以根据卷积的时移特性及例 2-11 的结果，可以直接写出 $s(t)$ 的表达式

$$s(t) = [1 - e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

$s(t)$ 的波形如图 2-20 所示。

一些常用函数卷积积分的结果见附录 A。

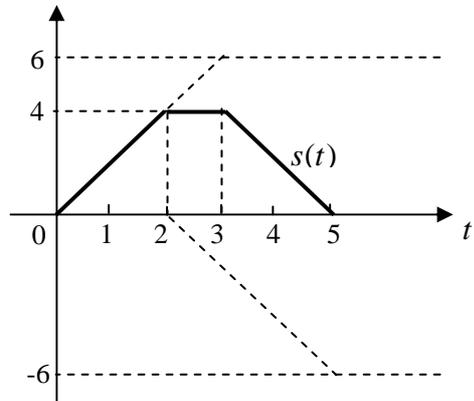


图 2-19 波形的合成

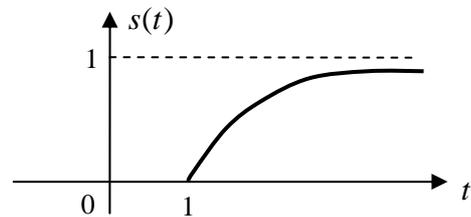
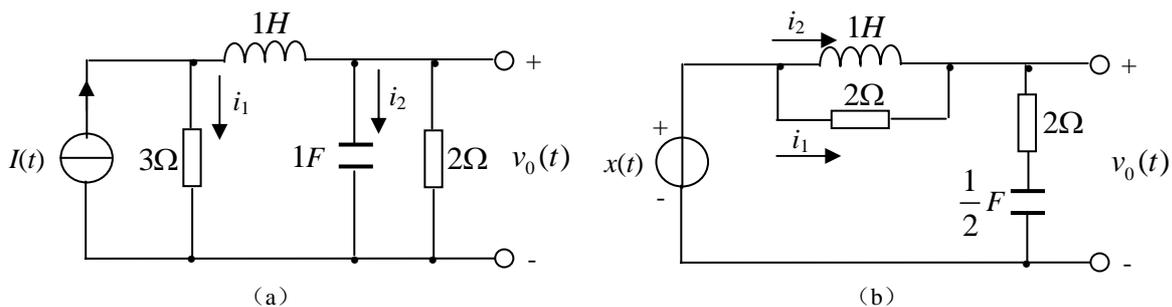


图 2-20 $s(t)$ 的波形

习 题

2-1 对题图 2-1 所示的电路图分别列写电流 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和电压 $v_0(t)$ 的微分方程式。



题图 2-1

2-2 已知系统微分方程相应的齐次方程为

$$(1) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

$$(2) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$$

对以上情况,若初始条件都是: $y(0^+) = 1, y'(0^+) = 2$, 试求各种情况的零输入响应 $y(t)$, 并粗略画波形。

2-3 给定系统微分方程, 起始状态及激励信号分别如下, 试判断在起始点是否发生跳变, 并据此写出 $y^{(k)}(0^+)$ 的值。

$$(1) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt}, y(0^-) = 0, x(t) = u(t)$$

$$(2) 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1, x(t) = u(t)$$

$$* (3) 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \quad y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1, x(t) = \delta(t)$$

2-4 给定系统微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

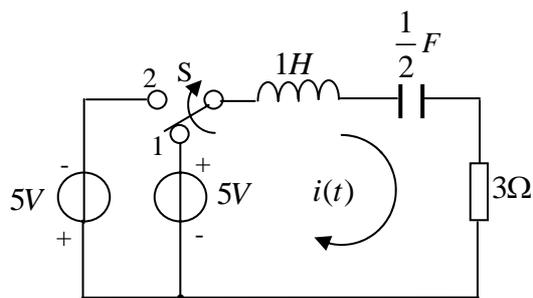
若激励信号与起始状态为以下二种情况时, 分别求它们的完全响应, 并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应(应注意在起始点是否发生跳变)。

$$(1) x(t) = u(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2$$

$$(2) x(t) = e^{-3t} u(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2$$

*2-5 电路如题图 2-5 所示, $t=0$ 以前开关

位于“1”已进入稳态, $t=0$ 时刻开关自“1”转至“2”, 求输出电流 $i(t)$ 的完全响应, 并指出其零输入、零状态、自由、强迫响应各分量。



题图 2-5

2-6 一线性系统在相同起始状态下, 当输入为 $x(t)$ 时, 全响应为 $(2e^{-t} + \cos 2t)u(t)$, 当输入为 $2x(t)$ 时, 全响应为 $(e^{-t} + 2\cos 2t)u(t)$, 求输入为 $4x(t)$ 时的全响应。

2-7 若激励信号为 $x(t)$, 响应信号为 $y(t)$ 的系统微分方程由下式描述, 分别求下面三种情况的冲激响应与阶跃响应:

$$(1) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$(2) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$(3) \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t)$$

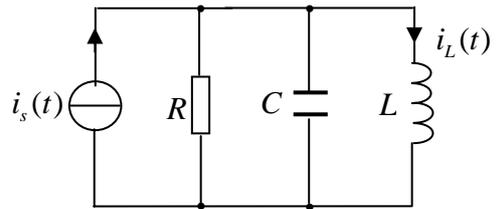
*2-8 系统的微分方程由下列各式描述，分别求系统的冲激响应与阶跃响应：

$$(1) \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt}$$

$$(2) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

2-9 电路如图 2-9 所示， $L = \frac{1}{5} \text{H}$ ， $C = 1 \text{F}$ ，

$R = \frac{1}{2} \Omega$ ，输出为 $i_L(t)$ ，试求其冲激响应。



题图 2-9

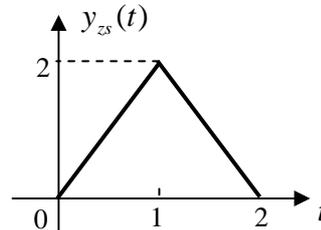
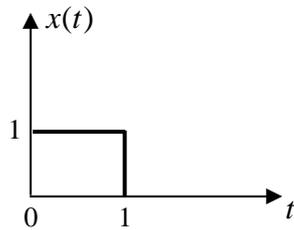
*2-10 一线性时不变系统，当输入为 $x(t)$

$= e^{-t}u(t)$ 时，若零状态响应为 $y_{zs}(t) = (\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$ ，求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

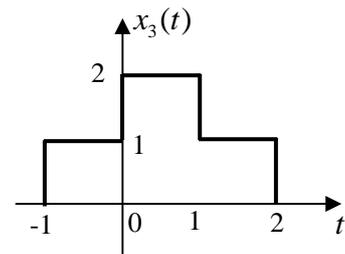
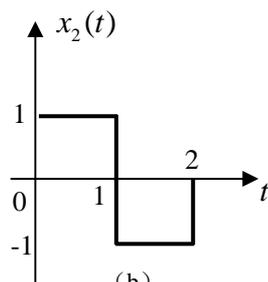
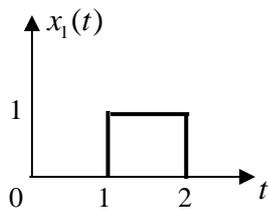
*2-11 设线性系统起始状态为零，输入 $x(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$ 如题图 2-11 (a) 所示。

(1) 画出系统冲激响应的波形。

(2) 当输入为题图 2-11 (b) 所示各信号时，画出输出响应波形。



(a)



(b)

题图 2-11

*2-12 一线性时不变系统，当激励信号为 $x_1(t) = \delta(t)$ 时，全响应为 $y_1(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$ ，当激励信号为 $x_2(t) = u(t)$ 时，全响应为 $y_2(t) = 3e^{-t}u(t)$ ，求系统的冲激响应 $h(t)$ （二种激励下，起始状态相同）。

2-13 试求下列各函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$

$$(1) f_1(t) = u(t), f_2(t) = e^{-at}u(t)$$

$$(2) f_1(t) = (1+t)[u(t) - u(t-1)], f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

(3) $f_1(t) = \cos \omega_0 t, f_2(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

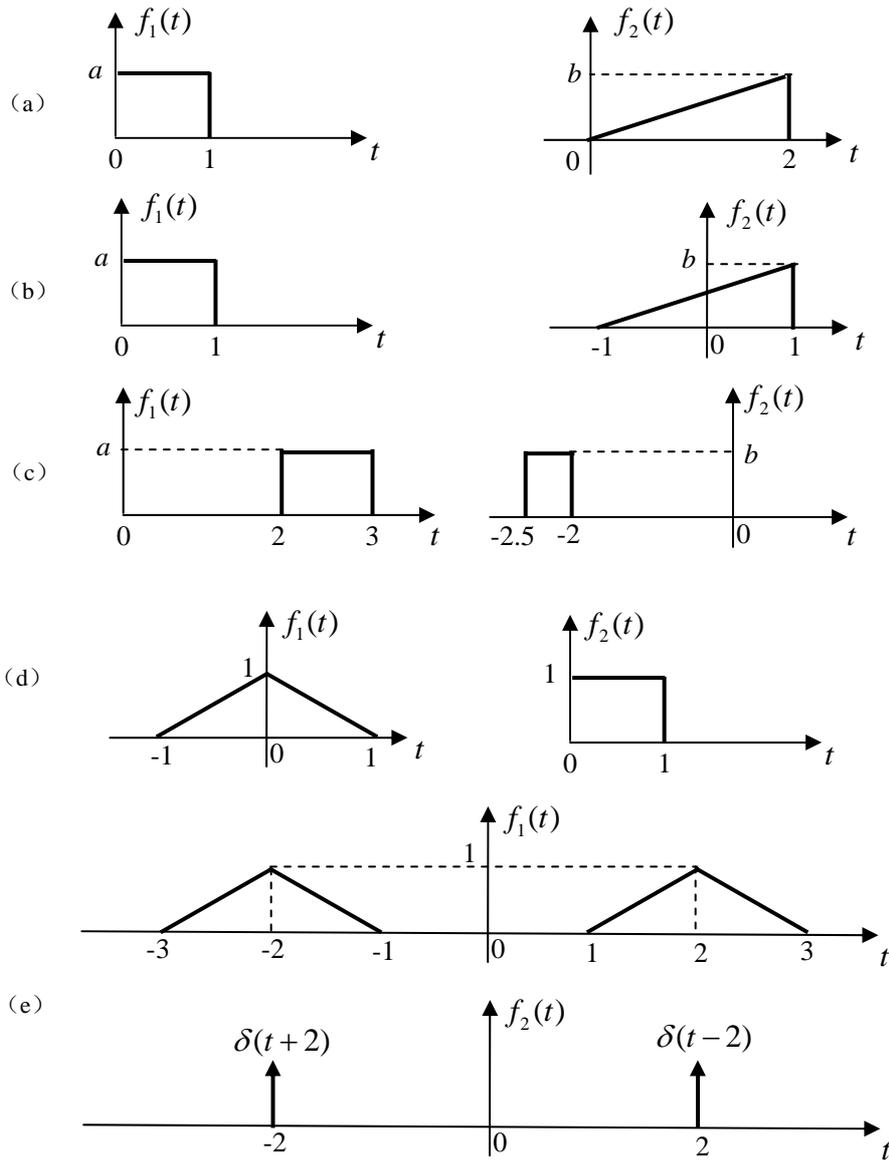
(4) $f_1(t) = e^{-at}u(t), f_2(t) = \sin tu(t)$

2-14 $f(t)$ 如下所示, 求 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 画出 $s(t)$ 的波形, 并注意二者区别。

(1) $f(t) = u(t) - u(t-1)$

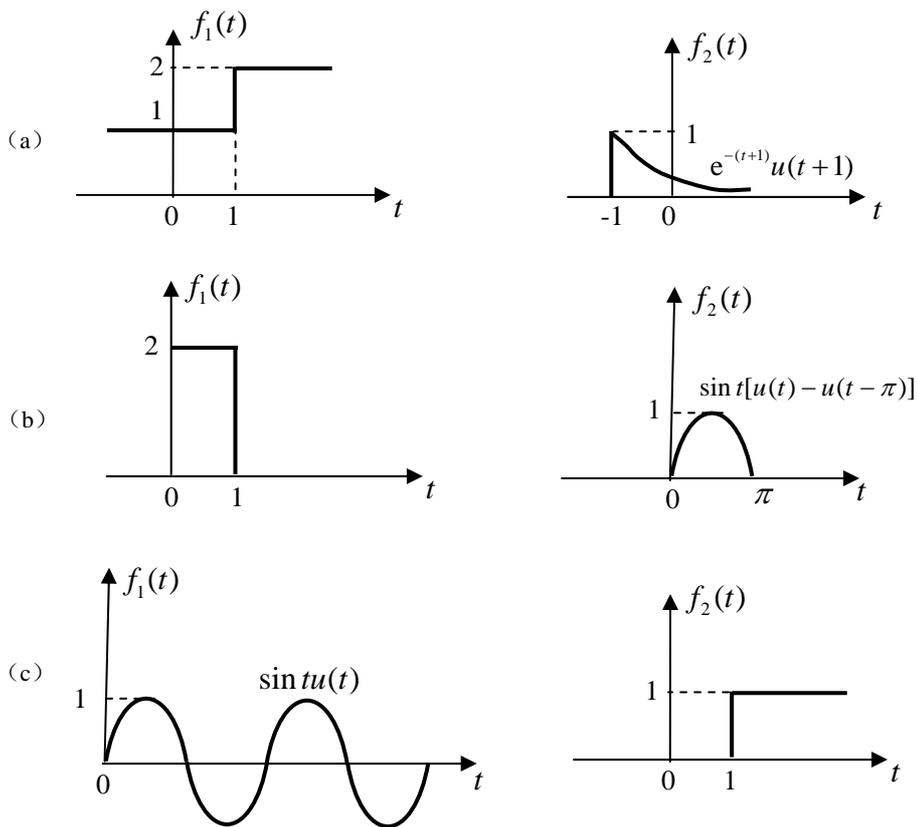
(2) $f(t) = u(t-1) - u(t-2)$

2-15 对于题图 2-15 所示的各组函数, 用图解法粗略画出 $f_1(t) * f_2(t)$ 的波形并计算卷积积分 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 写出表达式。



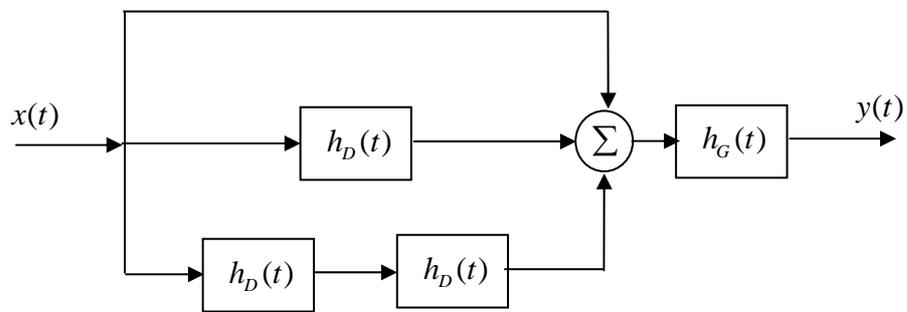
题图 2-15

*2-16 对题图 2-16 所示的各组信号, 求二信号的卷积 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 并绘出 $s(t)$ 的波形。



题图 2-16

2-17 题图 2-17 所示系统由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为 $h_D(t) = \delta(t-1)$, $h_G(t) = u(t) - u(t-3)$ ，试求总系统的冲激响应 $h(t)$ ，并画出 $h(t)$ 的波形。



题图 2-17